2018 年度 構造化学 (中田) Quiz 4 回目略解

1.1 $m = \rho dx$

1.2 $ma = \rho dx \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{dt}$

1.3 $F = T\sin\theta_1 - T\sin\theta_2$

1.4 Fの釣り合いの式は

$$F = T\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\frac{dx}{2}} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x-\frac{dx}{2}}\right\} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$(この式変形ができない人は微積要復習)

$T = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho dx \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^t}$ したがって $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\rho}{T}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 最後に$\dfrac{\rho}{T} = \dfrac{1}{v^2}$として$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$を得る。

2. 波動方程式$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$の解$u(x,t)$は変数分離できて、$u(x,t) = f(x)g(t)$とできる。波動方程式に代入すると、$\dfrac{1}{f(x)}\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{1}{g(t)}\dfrac{d^2 g(t)}{dt^2}$, 両辺は定数なので、$\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2} - kf(x) = 0$, $\dfrac{d^2 g(t)}{dt^2} - kv^2 g(t) = 0$と二本の方程式になる。さて$f$についての方程式を解くと、$f_n(x) = \sin\dfrac{n\pi x}{l} (n = 1, 2, \cdots)$ 次にgについて解くと

$g_n(t) = a_n \cos\left(\dfrac{n\pi vt}{l} + \phi_n\right)$ $(n = 1, 2, \cdots)$(a_n, ϕ_nは適当な実数)となるので、結局

$u(x,t) = f_n(x)g_n(t) = a_n \sin\dfrac{n\pi x}{l}\cos(\dfrac{n\pi vt}{l} + \phi_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$、a_n, ϕ_nは適当な実数)となる。

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$の解として$\Psi(x)\cos(\omega t)$を代入して$\dfrac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \dfrac{\omega^2}{v^2}\Psi(x) = 0$を得る。さらに変形して$\dfrac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \dfrac{4\pi^2}{\lambda^2}\Psi(x) = 0$を得る。次にエネルギー表式とド・ブロイの関係式を組み合わせて$\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2m[E - V(x)}}$この$\lambda$を代入すると

$\left[-\dfrac{\hbar}{2m}\dfrac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\Psi(x) = E\Psi(x)$を得る。注意: これはあくまでなんちゃて導出である。シュレーディンガー方程式は何からか導出できる方程式ではない。

4.ランダウ・リフシッツ量子力学 1 §17 を参考にせよ。波動関数$\Psi = ae^{iS/\hbar}$をシュレーディンガー方程式に代入すると、

$$a\frac{\partial S}{\partial t} - i\hbar\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{a}{2m}(\nabla S)^2 - \frac{i\hbar}{2m}a\Delta S - \frac{i\hbar}{m}\nabla S\nabla a - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta a + Ua = 0$$

となる。純実数、純虚数の項をそれぞれわけ、純実数の項のみに注目すると、

$\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U - \dfrac{\hbar^2}{2ma}\Delta a = 0$が得られる。$\hbar \to 0$で、$\dfrac{\partial S}{\partial t} + \dfrac{1}{2m}(\nabla S)^2 + U = 0$となり古典力学の Hamilton-Jacobi 方程式が得られた。古典と量子力学の対応がごく限られた系であるが、ついたことになる。